Problemas de Física I con soluciones

Mario I. Caicedo[1]

Departamento de Física

Universidad Simón Bolívar

[1]Esta es la versión 1.0, podría tener errores de redacción y/o escritura de las fórmulas

Índice general

Capítulo 1

Cinemática

Ejemplo 1 *Un carrito se desplaza a lo largo de una pista horizontal recta con rapidez* v_0. *Al pasar por un cierto punto un cañoncito situado justo al lado de la pista dispara un pequeño proyectil con una rapidez inicial* $4\,v_0$ *e inclinación de* 60^0 *-hacia arriba- con respecto a la horizontal en sentido contrario al que se desplaza el carrito.*

1. *Encuentre la ecuación de la trayectoria del proyectil según la describe un observador localizado en el carrito.*

2. *¿Cuál será la distancia entre el carrito y el proyectil cuando este último se encuentre de nuevo a la altura de la pista?*

Solución Este problema es bastante sencillo. Para atacarlo basta con notar dos cosas. En primer lugar, que un observador comovil con el carrito es inercial, y que por tanto la aceleración del proyectil para un tal observador es la aceleración de gravedad; en segundo lugar, que si la posición del proyectil en el sistema de referencia comovil con el carrito es $\mathbf{r}(t)$ entonces

$$\mathbf{r}_p(t) = \mathbf{r}_c(t) + \mathbf{r}(t) \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{r}_c(t)$ y $\mathbf{r}_p(t)$ son los vectores de posición del proyectil y del carrito con respecto a un observador fijo en tierra respectivamente. Tomando como referencial en tierra un sistema localizado en el punto en que se encuentra el cañon y como instante inicial ($t = 0$) el instante del disparo, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p(t) &= V_x\, t\hat{\mathbf{e}}_x + (V_y - \frac{g\,t^2}{2})\,\hat{\mathbf{e}}_y \quad \text{donde:} \quad V_x = -V\,cos\theta \qquad V_y = +V\,sen\theta\,y, && (1.2)\\ \mathbf{r}_c(t) &= v_0\,t\,\hat{\mathbf{e}}_x\,. && (1.3) \end{aligned}$$

De acá sigue inmediatamente que:

$$\mathbf{r}(t) = (V_x - v_0)\,t\,\hat{\mathbf{e}}_x + (V_y - \frac{g\,t^2}{2})\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{1.4}$$

Como obviamente V y θ son la rapidez del proyectil en la *boca de fuego* y el ángulo de inclinación del cañon respectivamente, $V = 4\,v_0$ y $\theta = 60^0$, al sustituir estos valores en (1.4) resulta:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{e}}_x + y(t)\hat{\mathbf{e}}_y = (-4\times\frac{1}{2} - 1)v_0\,t\,\hat{\mathbf{e}}_x + (4\frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0\,t - \frac{g\,t^2}{2})\,\hat{\mathbf{e}}_y = -3\,v_0\,t\,\hat{\mathbf{e}}_x + (2\sqrt{3}\,v_0 - \frac{gt}{2})\,t\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{1.5}$$

La ecuación de la trayectoria se consigue sin mayor problema al expresar t en función de x en (1.5) y sustituir en $y(t)$, se obtiene finalmente la ecuación de la trayectoria según un observador comovil con el carrito:

$$y(x) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}\,x - \frac{g}{18\,v_0^2}\,x^2 \tag{1.6}$$

Es evidente que aparte de el instante inicial, el proyectil vuelve a estar a altura 0 en el instante

$$t' = 4\,\sqrt{3}\frac{v_0}{g} \tag{1.7}$$

y que en ese instante la coordenada x de $\mathbf{r}(t)$ será

$$x(t') = -12\,\sqrt{3}\frac{v_0^2}{g} \tag{1.8}$$

y en consecuencia la distancia entre el carrito y el proyectil en t' será:

$$d = |x(t')| = 12\,\sqrt{3}\frac{v_0^2}{g}. \tag{1.9}$$

Ejemplo 2 *Un avión de rescate que vuela horizontalmente con una rapidez rapidez v_A se encuentra a una altura h sonbre el nivel del mar. El avión deja caer un cajón con suministros tratando de impactar en un bote que en el momento del lanzamiento está localizado a una distancia d de la vertical de la de la proa del avión. El bote se desplaza con rapidez u_B en el mismo sentido del avión.*

1. *¿Cuál deberá ser la rápidez del avión para que el cajón haga blanco en el bote? (exprese su respuesta en función de d, h y u_B).*

2. *Encuentre la ecuación de la trayectoria del cajón según la describe un observador que se encuentre en el bote.*

El mov. del cajón en el sistema de ref. del bote es:

$$\mathbf{r}(t) = ((v_A - u_B)\,t - d)\hat{\mathbf{e}}_1 + (h - g\,t^2/2)\,\hat{\mathbf{e}}_2$$

el tiempo de vuelo del cajón es: $t_v = 2\,h/g$. Para que el impacto tenga lugar es menester que $x(t_v) = 0$, es decir:

$$v_A = d/t_v + u_B = u_B + \frac{d\,g}{2\,h}$$

Capítulo 2

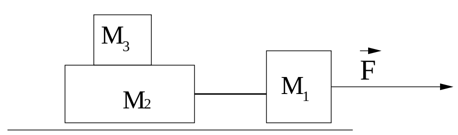
Dinámica

2.1. Problemas Elementales

Ejemplo 3 *Una fuerza* $\mathbf{F} = F_0\,\hat{\mathbf{e}}_x$ *(*$F_0 > 0$*) actúa sobre un sistema de tres bloques como muestra la figura adjunta. Los bloques se mueven solidariamente y no hay fricción entre el piso y los bloques que se encuentran sobre este. Utilizando el sistema de referencia usual (*$\hat{\mathbf{e}}_x$ *apunta hacia la derecha y* $\hat{\mathbf{e}}_y$ *hacia arriba),*

1. *Encuentre la fuerza de roce que actúa sobre* M_3 *[5 pts].*

2. *Encuentre la fuerza que la cuerda ejerce sobre* M_2 *[5 pts].*



Solución

Este problema también es bastante sencillo, en efecto, la condición acerca del movimiento de las partículas permite asegurar que la aceleración del cajón de masa M_3 es la misma que la del sistema compuesto de masa $M = M_1 + M_2 + M_3$, es decir:

$$\mathbf{a}_3 \equiv a = \frac{\mathbf{F}}{M} = \frac{F_0}{M}\,\hat{\mathbf{e}}_x \tag{2.1}$$

por otra parte, la única fuerza horizontal que actúa sobre M_3 es la componente horizontal de la reacción ($\mathbf{\Lambda}^{(3)} = \lambda_{||}^{(3)}\hat{\mathbf{e}}_x + \lambda_{\perp}^{(3)}\hat{\mathbf{e}}_x$)de M_2 sobre M_3, es decir: el roce, y en consecuencia, la solución a la parte (a) del problema es:

$$\lambda_{||}^{(3)}\hat{\mathbf{e}}_x = M_3\,\mathbf{a}_3 = M_3\,\frac{F_0}{M_1 + M_2 + M3}\,\hat{\mathbf{e}}_x \tag{2.2}$$

Para la parte (b) del problema basta con notar que si denotamos por $\mathbf{T}$ a la fuerza que la cuerda hace sobre M_1 y ponemos $\mathbf{T} = T\,\hat{\mathbf{e}}_x$ la *ecuación de movimiento* para el movimiento de M_1 en la dirección del vector $\hat{\mathbf{e}}_x$ es sencillamente:

$$T + F_0 = M_1\,a \tag{2.3}$$

de donde, sustituyendo el resultado que obtuvimos en (2.1) se obtiene

$$\mathbf{T} = -\frac{M_2 + M_3}{M}\,F_0\,\hat{\mathbf{e}}_x \tag{2.4}$$

finalmente, recordando que la cuerda es ideal, podemos asegurar que la fuerza ($\mathbf{T}'$) que esta ejerce sobre M_2 es[1]

$$\mathbf{T}' = -\mathbf{T} = \frac{M_2 + M_3}{M}\,F_0\,\hat{\mathbf{e}}_x \tag{2.5}$$

Observación: otra forma muy simple de calcular la fuerza que la cuerda ejerce sobre M_2 consiste en notar que la fuerza neta que actúa sobre el sistema formado por las masas M_2 y M_3 es precisamente $\mathbf{T}'$ y que en consecuencia:

$$\mathbf{T}' = (M_2 + M_3)\,\mathbf{a} = \frac{M_2 + M_3}{M}\,F_0\,\hat{\mathbf{e}}_x \tag{2.6}$$

[1]OJO: recuerde que $\mathbf{T}'$ NO es la reacción a $\mathbf{T}$

2.2. Problemas sencillos con roce

Ejemplo 4 *Sobre un bloque de masa M que está en contacto con una pared vertical rugosa a lo largo de la cual puede desplazarse, actúa una fuerza horizontal (en sentido hacia la pared) de magnitud $2Mg$. Sabiendo que el bloque se mueve inicialmente hacia arriba con rapidez v_0 y que los coeficientes de roce dinámico y estático entre M y la pared son μ_d y $\mu_e = 2\mu_d$,*

1. *Encuentre la altura máxima que alcanzará M.*
2. *El mínimo valor del coeficiente de roce estático que asegure que M se mantenga en su posición final.*

Solución

La situación física está representada en la figura 3.

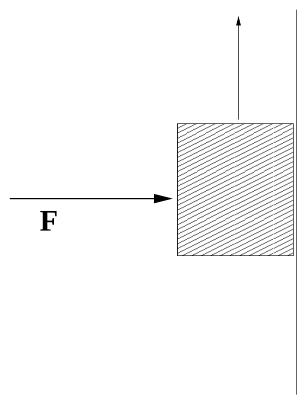


Figura 2.1: La flecha delgada indica la veloidad inicial del bloque, mientras que **F** es la fuerza aplicada sobre el cuerpo

Para hallar la altura máxima (sobre la posición inicial) que alcanza el bloque basta con usar el teorema del trabajo y la energía para poner[2]

$$T_B - T_A = -mgh - \mu_d F h \tag{2.7}$$

[2]Recordemos el enunciado del teorema del trabajo y la energía. Si A y B son los puntos inicial y final del

de donde ($T_B = 0$):

$$h = \frac{T_A}{mg + \mu_d F} \tag{2.8}$$

al sustituir $F = 2mg$ resulta

$$h = \frac{v_0^2}{2(1 + 2\mu_d)g}$$

En el punto B las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque son, $\mathbf{F}$, el peso y la reacción ($\mathbf{\Lambda}$) que ejerce la pared. El roce estático ($\lambda_{||}$) es la componente de la reacción que es tangente a la superficie, en consecuencia, $\lambda_{||}$ es la única fuerza alineada con el peso. Para que el bloque permanezca estática en el punto en que se detiene (B), la fuerza vertical neta debe anularse, lo que implica

$$mg = \lambda_{||}\,,$$

en el caso extremo $\lambda_{||} = \mu_e|\lambda_{\perp}|$ donde $\lambda_{\perp}$ es la componente de la reacción ortogonal a la pared y que en el problema que estamos estudiando compensa exactamente la fuerza $\mathbf{F}$, de manera que $\lambda_{\perp} = 2mg$. De allí sigue que

$$mg = \mu_e\, 2mg$$

de donde se concluye que $\mu_e \geq 0{,}5$

movimiento, $T_B - T_A = W_{neto}$ donde W_{neto} es el trabajo realizado por la fuerza neta aplicada sobre la partícula. En la situación planteada la fuerzqa $\mathbf{F}$ y la componente de la reacción ortogonal a la pared ($\lambda_{\perp}$) no hacen trabajo, mientras que $-mgh$ es el trabajo realizado por el peso y $-\mu_d Fh$ el trabajo realizado por el roce ($\lambda_{||}$.

Ejemplo 5 *Sobre un bloque de masa M que está en contacto con un plano inclinado rugoso a lo largo del cual puede desplazarse, actúa una fuerza ortogonal al plano (en sentido hacia este) de magnitud αMg ($\alpha > 0$ es una constante adimensional). Sabiendo que el bloque se mueve inicialmente hacia arriba con rapidez v_0, que los coeficientes de roce dinámico y estático entre M y la pared son μ_d y μ_e y que el ángulo que el plano inclinado hace con la horizontal es θ*

1. *Encuentre la altura máxima (por encima de la posición del bloque) que alcanzará M.*

2. *El mínimo valor del coeficiente de roce estático que asegure que M se mantenga en su posición final.*

Solución

Este problema es bastante parecido al anterior así que esta vez no escribiremos tantos detalles.

Para hallar la altura máxima (sobre la posición inicial) que alcanza el bloque basta con usar el teorema del trabajo y la energía para poner (A y B son los puntos inicial y final del movimiento, y $s = h\, sen\theta$ es el recorrido a lo largo del plano inclinado)

$$T_B - T_A = -Mgh - \mu_d\,|\lambda_\perp|\,h\,sen\theta = -(Mg + \mu_d, sen\theta\,F)h \tag{2.9}$$

en donde $\lambda_\perp$ es la componente de la reacción del plano sobre el bloque perpendicular al plano inclinado. Observando que $T_B = 0$ obtenemos

$$h = \frac{T_A}{(Mg + \mu_d\,sen\theta\,|\lambda_\perp|)} \tag{2.10}$$

por otra parte, las ecuaciones de movimiento del bloque permiten deducir que $\lambda_\perp = Mgcos\theta + F$, y al sustituir $F = \alpha\,M\,g$ resulta

$$h = \frac{v_0^2}{2[1 + \mu_d\,(cos\theta + \alpha)\,sen\theta]g} \tag{2.11}$$

En el punto B las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque son, $\mathbf{F}$, el peso y la reacción que ejerce el plano inclinado. Como sabemos, el roce estático es la componente de la reacción que es tangente a la superficie, es decir: $\lambda_{||}$, luego es la única fuerza alineada con la componente del peso a lo largo del plano inclinado. Para que el bloque permanezca en ese punto, la fuerza neta a lo largo del plano debe anularse, esto es:

$$Mg\, sen\theta = \lambda_{||} \tag{2.12}$$

y en el caso extremo $F_r = \mu_e N$ donde N es la magnitud que ya hemos calculado la igualdad que acabamos de escribir se expresa como

$$Mg\, sen\theta = \mu_e\, (cos\theta + \alpha) Mg \tag{2.13}$$

de donde se concluye que $\mu_e \geq \frac{sen\theta}{\cos\theta + \alpha}$

Capítulo 3

Dinamica del movimiento circular

Ejemplo 6 *Un modelo a escala de una sección de una montaña rusa está constituido por un monoriel sin roce que es empujado violentamente por un resorte para obligarlo a moverse a lo largo de una pista que consta de un primer tramo horizontal alto, un riel curvado que forma un cuarto de círculo de radio R que obliga al tren a descender, un tramo vertical de descenso de longitud $2R$ que le sigue y otro riel curvado formando otro cuarto de círculo de radio R que obliga al carrito a volver a moverse horizontalmente en el mismo sentido inicial a lo largo de otro tramo de pista en el que hay roce caracterizado por un coeficiente dinámico μ_e.*

Conociendo la masa del carrito (m), la constante (κ) y la compresión (x) del resorte antes de liberar al carrito,

1. La fuerza que la pista ejerce sobre el carrito cuando este pase por el punto medio de la primera trayectoria circular

2. La fuerza que la pista ejerce sobre el carrito justo después de que este entra en la zona vertical del carrito, y

3. La longitud que debe tener el segundo tramo horizontal para que el carrito se detenga totalmente

Comencemos por dibujar la situación, según la explicación que aparece en el planteamiento, la pista del monoriel debe tener una forma aproximada a la que se muestra en la figura 3.

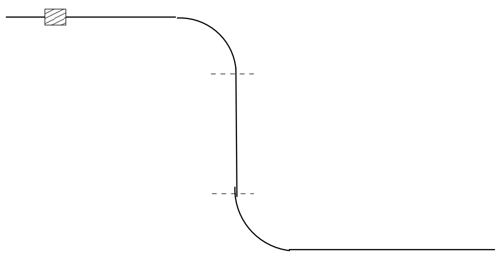


Figura 3.1: La cajita que se muestra representa al carrito cuyo movimiento inicial es haciala derecha.

Si escogemos que la energía potencial gravitacional es cero a la altura del segundo trayecto horizontal (el más bajo), podremos poner que la energía inicial del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}\kappa\, x^2 + 4Rmg \tag{3.1}$$

En cualquier punto de trayectoria circular las fuerzas que actúan sobre el carrito son el peso y la reacción ($\mathbf{\Lambda}$) de la pista. En particular, en cualquier punto del primer arco y escribiendo la aceleración del carrito en coordenadas polares centradas en el centro del arco la segunda ley de Newton adopta la forma

$$\mathbf{W} + \mathbf{\Lambda} = m\,\left(R\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r\right)$$

pero, en estas coordenadas el peso y la reacción se descomponen como $\mathbf{W} = mg(sen\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta - cos\theta\,\hat{\mathbf{u}}_r)$ y $\mathbf{\Lambda} = \lambda_\perp\,\hat{\mathbf{u}}_r$ (como no hay roce no hay componente tangencial de la reacción de la pista sobre el cqarrito), de manera que las ecuaciones de movimiento son:

$$m\,g\,sen\theta \;\;=\;\; m\,R\ddot{\theta} \tag{3.2}$$

$$-m\,g\,cos\theta + \lambda_\perp \;\; = \;\; -m\,R\,\dot{\theta}^2 \tag{3.3}$$

En cualquier punto del primer trayecto circular y observando que la reacción de la pista no hace trabajo, podemos poner[1]

$$E = mg(3+cos\theta)R + \frac{1}{2}\,m\,R^2\omega^2 \tag{3.4}$$

donde: $\omega = \dot{\theta}|_\theta$. De acuerdo a esto,

$$mR\omega = \frac{2E}{R} - 2mg(3+cos\theta) \tag{3.5}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.3) obtenemos

$$\lambda_\perp \;\; = \;\; mgcos\theta - \left[\frac{2E}{R} - 2mg(3+cos\theta)\right] \tag{3.6}$$

Sustituyendo la energía inicial resulta

$$\begin{aligned}
\lambda_\perp \;\; &= \;\; mgcos\theta - \left[\frac{2}{R}(\frac{1}{2}\kappa\,x^2 + 4Rmg) - 2mg(3+cos\theta)\right] = \\
&= \;\; mgcos\theta - \left[2mg - \frac{\kappa\,x^2}{R} - 2mg\,cos\theta\right] = \\
&= \;\; 3mgcos\theta - \left[2mg - \frac{\kappa\,x^2}{R}\right] \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

En resumen, el resultado parcial es:

$$\lambda_\perp = mg(3cos\theta - 2) + \frac{\kappa\,x^2}{R} \tag{3.8}$$

Al evaluar en $\theta = \pi/4$ obtenemos que la reacción de la pista sobre el carrito en ese punto es

$$\mathbf{\Lambda} = \left[mg(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2) + \frac{\kappa\,x^2}{R}\right]\hat{\mathbf{u}}_r \tag{3.9}$$

[1] la altura sobre el nivel de energía potencial nula es $h = (3+cos\theta)R$ donde θ es elángulo que definimos como 0 en el punto más alto del circulo y $\pi/2$ al final del primer arco

Justo después de pasar el final del arco de círculo el carrito queda en un movimiento vertical y por lo tanto la pista no ejerce fuerza alguna sobre el carrito.

Finalmente, para asegurar que el carrito se detenga en el segundo tramo horizontal, el roce debe consumir toda la energía inicial, de manera que

$$\frac{1}{2}\kappa\, x^2 + 4Rmg = \mu_c mgL$$

de donde sigue que la longitud de ese tramo del trayecto debe ser

$$L = \frac{\frac{1}{2mg}\kappa\, x^2 + 4R}{\mu_c}$$

Ejemplo 7 *Un modelo a escala de una sección de una nueva montaña rusa está constituido por un monoriel sin roce que es empujado violentamente por un resorte para obligarlo a moverse a lo largo de una pista con forma de loop (lazo) invertido. De manera que la pista consta de un tramo horizontal, un riel curvado que forma un círculo completo cuyo punto más alto está al mismo nivel que el primer tramo horizontal y un tramo horizontal de frenado que está al final del lazo (es decir, a la misma altura que el primer tramo) y que está caracterizado por un coeficiente de roce dinámico* μ_e*.*

Conociendo la masa del carrito (m)*, la constante* (κ) *del reorte y el radio* R *del loop*

1. *¿Cuál deberá ser la compresión inicial del resorte para asegurar que el carrito llegue al tramo de frenado?. La fuerza que la pista ejerce sobre el carrito cuando este pase por el punto medio de la primera trayectoria circular*

2. *La fuerza que la pista ejerce sobre el carrito cuando este ha recorrido* $3/8$ *del lazo.*

3. *La longitud que debe tener el segundo tramo horizontal para que el carrito se detenga totalmente*

Si escogemos que la energía potencial gravitacional es cero en el punto más bajo del loop podremos poner que la energía inicial del sistema está dada por:

$$E = \frac{1}{2}\kappa\, x^2 + 2Rmg$$

En cualquier punto de la primera trayectoria circular las fuerzas que actúan sobre el carrito son el peso y la reacción ($\mathbf{F}_R$) de la pista, de manera que (escribiendo la aceleración en coordenadas polares con centro en el centro del loop)

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_R = m(R\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r)$$

pero, en estas coordenadas el peso y la reacción se descomponen como $\mathbf{W} = mg(sen\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta - cos\theta\,\hat{\mathbf{u}}_r)$ y $\mathbf{F}_R = F\hat{\mathbf{u}}_r$, de manera que las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} mg\,sen\theta &= mR\ddot{\theta} && (3.10)\\ -mgcos\theta + F &= -mR\dot{\theta}^2 && (3.11) \end{aligned}$$

En cualquier punto del primer trayecto circular y observando que la reacción de la pista no hace trabajo, podemos poner

$$E = mg(1 + cos\theta)R + \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

donde: $\omega = \dot{\theta}|_\theta$. De acuerdo a esto,

$$mR\omega^2 = \frac{2E}{R} - 2mg(1 + cos\theta)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.11) obtenemos

$$F = mgcos\theta - \left[\frac{2E}{R} - 2mg(1 + cos\theta)\right] \qquad (3.12)$$

Sustituyendo la energía inicial resulta

$$\begin{aligned} F &= mgcos\theta - \left[\frac{2}{R}(\frac{1}{2}\kappa\, x^2 + 2Rmg) - 2mg(1 + cos\theta)\right] = \\ &= mgcos\theta - \left[2mg - \frac{\kappa\, x^2}{R} - 2mg\,cos\theta\right] = \\ &= 3mgcos\theta - \left[2mg - \frac{\kappa\, x^2}{R}\right] && (3.13) \end{aligned}$$

En resumen, el resultado parcial es:

$$F = mg(3cos\theta - 2) + \frac{\kappa\, x^2}{R} \qquad (3.14)$$

La condición para que el carrito pueda alcanzar el segundo tramo de la horizontal de la pista consiste en que la normal en ese punto se haga nula, al evaluar esta condición poniendo $\theta = 2\pi$

obtenemos

$$\mathbf{F}_R = 0 = \left[mg(3-2) + \frac{\kappa\, x^2}{R} \right] \hat{\mathbf{u}}_r$$

de manera que, en términos de las cantidades conocidas:

$$mg(3-2) + \frac{\kappa\, x^2}{R} = 0$$

de donde:

$$x = \sqrt{\frac{2mgR}{\kappa}}$$

Cuando el carrito ha recorrido 3/8 del recorrido el ángulo es $\theta = 3\pi/4$, sustituyendo este ángulo en la fórmula (3.14) obtenemos que la fuerza que la pista hace sobre el carrito en ese punto es:

$$\begin{aligned} F|_{\theta=3\pi/4} &= mg(3cos(3\pi/4) - 2) + \kappa \times (\sqrt{\frac{2mgR}{\kappa}})^2/R = \\ &= mg(-3\frac{\sqrt{2}}{2} - 2) + 2mg) = -3mg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

en la dirección radial.

Finalmente, para asegurar que el carrito se detenga en el segundo tramo horizontal, el roce debe consumir toda la energía inicial, de manera que

$$\frac{1}{2}\kappa\, x^2 + 2Rmg = 3mgR = \mu_c mgL$$

de donde sigue que la longitud de ese tramo del trayecto debe ser

$$L = \frac{3R}{\mu_c}$$

Capítulo 4

Colisiones

Ejemplo 8 *Un bloque de masa $m = 3$ Kg es disparado sobre un plano horizontal rugoso por medio de un resorte de constante elástica $\kappa = 300$ N/m, el coeficiente de roce cinético entre el bloque y el piso es $\mu_c = \frac{1}{3}$. El bloque golpea a una masa ($M = 6$ Kg) que cuelga inerte de un techo sujeta por un hilo de longitud ($\ell = 1$ m). Sabiendo que la rapidez del proyectil justo antes del impacto es $v = 4$ m/s, que la colisión ocurre en el punto de equilibrio del resorte y que la colisión es elástica*

1. *Calcule la compresión del resorte antes de lanzar al bloque de masa m.*
2. *Encuentre la altura máxima que alcanza el bloque de masa M después de la colisión*
3. *El cambio de momentum que sufre la masa m.*

Solución:

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía, y llamando x a la magnitud de la compresión inicial del resorte tenemos que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\kappa x^2 - \mu_c mgx$$

ó

$$\kappa x^2 - 2\mu_c mgx - mv^2$$

i.e.

$$x = \frac{2\mu_c mg \pm \sqrt{4\mu_c^2 m^2 g^2 + 4\kappa mv^2}}{2\kappa} = \frac{\mu_c mg \pm \sqrt{\mu_c^2 m^2 g^2 + \kappa mv^2}}{\kappa}$$

como x es una magnitud, la solución física es

$$x = \frac{2\mu_c mg \pm \sqrt{4\mu_c^2 m^2 g^2 + 4\kappa mv^2}}{2\kappa} = \frac{\mu_c mg + \sqrt{\mu_c^2 m^2 g^2 + \kappa mv^2}}{\kappa}$$

Para hallar la altura máxima que alcanza el bloque de masa M es menester encontrar la energía cinética que este adquiere luego de la colisión, para ello usamos que (el momentum inicial del sistema es $p = Mv$)

$$p = p_M + p_m$$

y

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_M^2}{2M} + \frac{p_m^2}{2m}$$

de donde sigue que

$$p^2 = (p - p_M)^2 + \frac{m}{M} p_M^2$$

ó

$$(\frac{m}{M} + 1) p_M^2 - 2pp_M = 0$$

i.e. (la solución $p_M = 0$ no es física pues coincide con ausencia de colisión)

$$p_M = \frac{2M}{M+m} p$$

(en términos de velocidades, la velocidad de la masa M luego de la colisión es: $v_M = \frac{2mv}{M+m}$. Del último resultado, y tomando la energía potencial gravitacional como 0 en la posición inicial de

m hallamos la altura máxima que esta alcanza a partir de la igualdad (la reacción de la pista en la zona lisa no hace trabajo)

$$Mgh = \frac{p_M^2}{2M}$$

i.e.

$$h = \frac{1}{Mg} \times \frac{1}{2M} \left(\frac{2M\,p}{M+m} \right)^2 = \frac{2p^2}{g(M+m)^2}$$

Finalmente, el cambio de momentum que sufre m es sencillamente:

$$\Delta\vec{p}_m = (p_m - p)\,\hat{\mathbf{e}}_x = [p - p_M - p]\;\hat{\mathbf{e}}_x = -p_M\,\hat{\mathbf{e}}_x$$

Ejemplo 9 *Un bloque de masa $m = 3$ Kg es lanzado a lo largo de una pista por medio de un resorte de constante elástica $\kappa = 300$ N/m, la pista esta compuesta por un tramo horizontal y un arco de círculo de radio $R = 1$ m. El tramo horizontal es rugoso y el roce entre dicho tramo de pista y m está caracterizado por el coeficiente de roce cinético ($\mu_c = \frac{1}{3}$). El bloque golpea a una masa ($M = 6$ Kg) que se encuentra inicialmente en reposo en el punto en que la pista comienza a ser curva. Sabiendo que la rapidez del bloque incidente justo antes del impacto es $v = 4$ m/s, que la colisión ocurre en el punto de equilibrio del resorte y que la colisión es elástica*

1. *Calcule la compresión del resorte antes de lanzar al bloque de masa m.*

2. *Encuentre la altura máxima que alcanza el bloque de masa M después de la colisión*

3. *El cambio de momentum que sufre la masa m.*

Solución:

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía, y llamando x a la magnitud de la compresión inicial del resorte tenemos que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\kappa x^2 - \mu_c mgx$$

ó

$$\kappa x^2 - 2\mu_c mgx - mv^2$$

i.e.

$$x = \frac{2\mu_c mg \pm \sqrt{4\mu_c^2 m^2 g^2 + 4\kappa mv^2}}{2\kappa} = \frac{\mu_c mg \pm \sqrt{\mu_c^2 m^2 g^2 + \kappa mv^2}}{\kappa}$$

como x es una magnitud, la solución física es

$$x = \frac{2\mu_c mg \pm \sqrt{4\mu_c^2 m^2 g^2 + 4\kappa mv^2}}{2\kappa} = \frac{\mu_c mg + \sqrt{\mu_c^2 m^2 g^2 + \kappa mv^2}}{\kappa}$$

Para hallar la altura máxima que alcanza el bloque de masa M es menester encontrar la energía cinética que este adquiere luego de la colisión, para ello usamos que (el momentum inicial del sistema es $p = Mv$)

$$p = p_M + p_m$$

y

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_M^2}{2M} + \frac{p_m^2}{2m}$$

de donde sigue que

$$p^2 = (p - p_M)^2 + \frac{m}{M} p_M^2$$

ó

$$(\frac{m}{M} + 1)p_M^2 - 2pp_M = 0$$

i.e. (la solución $p_M = 0$ no es física pues coincide con ausencia de colisión)

$$p_M = \frac{2M}{M + m} p$$

(en términos de velocidades, la velocidad de la masa M luego de la colisión es: $v_M = \frac{2mv}{M+m}$. Del último resultado, y tomando la energía potencial gravitacional como 0 en la posición inicial de m hallamos la altura máxima que esta alcanza a partir de la igualdad (la reacción de la pista en la zona lisa no hace trabajo)

$$Mgh = \frac{p_M^2}{2M}$$

i.e.

$$h = \frac{1}{Mg} \times \frac{1}{2M} \left(\frac{2M\, p}{M + m} \right)^2 = \frac{2p^2}{g(M + m)^2}$$

Finalmente, el cambio de momentum que sufre m es sencillamente:

$$\Delta \vec{p}_m = (p_m - p)\, \hat{\mathbf{e}}_x = [p - p_M - p]\ \hat{\mathbf{e}}_x = -p_M\, \hat{\mathbf{e}}_x$$